Topology

位相空間論の入門から基礎まで

October 2026

$\mathbb{Z}$undamϕrphism

Contents

Chapter 1　基礎編　3

1.0　微分積分学の舞台　3
1.1　位相の定義　4
1.2　基本的な概念　6
1.3　連続写像と同相　9
1.4　誘導位相　14
1.5　コンパクト性　17
1.6　Coming Soon...　19

References　20

(i) 本コンテンツに関する著作権その他の知的財産権は，すべて著作者に帰属します．著作権法で認められている私的利用の範囲を超えて，本コンテンツの全部または一部を無断で複製，転載，改変，販売，配布する等の行為は一切禁止しております．
(ii) 権利者の許諾なく (i) に違反する行為またはこれに準ずる行為が行われていることが発覚した場合には，法的措置をとらせていただく場合がございます．
(iii) 万が一内容の誤りによって損害やトラブルが発生した場合でも，当方では責任を負いかねます．
(iv) 誤植やご意見等ございましたら，zundamorphism@icloud.com までご連絡いただけますと幸いです．

Chapter 1

基礎編

1.0　微分積分学の舞台

多くの大学の数学科では，大学一年生で微分積分学を勉強します．簡単に言うと，微分積分学とは Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ における極限の扱い方に関する学問です．

軽く復習しておきましょう．Euclid 空間とは，高校数学における二次元平面や三次元空間を一般化したものであり，最も理解しやすい空間の一つです．Euclid 空間では，内積やノルム，距離などが定義されています．例えば，x と y の内積は

$$(x,y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

で，関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の連続性は

$$\varepsilon > 0, {}^{\forall}x \in \mathbb{R}^n, {}^{\exists}\delta > 0, {}^{\forall}y \in \mathbb{R}^n, \quad \|x-y\| < \delta \implies \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$$

で定義されます．また，$A \subseteq \mathbb{R}^n$ が開集合であるとは

$${}^{\forall}a \in A, {}^{\exists}\varepsilon > 0, \quad B_\varepsilon(a) \subseteq A$$

であることとして定義されます．このような定義を出発点として，Euclid 空間における様々な考察が展開されたのでした．

では，逆に極限について考えるときには，Euclid 空間で考えなければならないのでしょうか？ 或いは，Euclid 空間以外では極限の概念を導入できないのでしょうか？ そこで出てくるのが位相空間です．位相空間は，Euclid 空間と違って内積やノルム，距離さえも定義されていない，遥かに条件の弱い空間なのにも関わらず，極限の概念を一通り考えることができる空間なのです．位相空間を一言で言えば

“極限という概念を定義できる最低限の条件を持ち合わせた空間”

です．

位相空間の定義を紹介する前に，“距離” について再考してみましょう．

例 1.0.1. A さんの家の座標を (x_A, y_A)，B さんの家の座標を (x_B, y_B) とすると，彼らの家の Euclid 距離は

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

で与えられる．[a] $d(A,B) = 1000$ [km] なら，彼らの家は離れていると言える．

C さんと D さんの家の座標は不明である．だが，C さんは東京都に，D さんは北海道に在住していることから，彼らの家は離れていると言える．日本を 47 に分割した都道府県は，おおよその距離感を掴むのに便利である．

[a] 地球表面は S^2 と見做すべきでしょうが，簡単のため地球表面は平面であると見做すことにします．

遠近感には，距離のように厳密な指標から，都道府県レベルの曖昧な感覚まである訳です．例 1.0.1 を見れば，日本を 47 に区画分けすることによって，距離よりもはるかに弱いある種の“遠近感”を得られたことが分かります．この例の発想をもとに，区画分けされた集合を数学的に定義していきます．

1.1 位相の定義

まず，集合論的に良い感じの性質[*1]をもつ集合 S の区分けを，次で定義します．

定義 1.1.1. S を空でない集合とする．S の部分集合族 $\mathcal{O} \subseteq \mathscr{P}(S)$ が次の条件[a]を満たすとき，$\mathcal{O}$ は S に位相構造を定めると言う．[b]この $\mathcal{O}$ を**位相**と言い，S と $\mathcal{O}$ の組 $(S, \mathcal{O})$ を**位相空間**と言う．[c]

(i) $S \in \mathcal{O}, \quad \emptyset \in \mathcal{O}.$

(ii) $\{O_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O} \implies \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_i \in \mathcal{O}.$

(iii) $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{O} \implies \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}.$

$\mathcal{O}$ の元を**開集合**と言う．

[a] これら 3 つの性質は，Euclid 空間における開集合が持つ性質を一般化したものになっています．
[b] $\mathscr{P}(S)$ は S の冪集合を表します．LaTeX では\mathscr{P}(S) で出力できます．2^S とも書きます．
[c] $\mathcal{O}$ は O のカリグラフィー体です．LaTeX では\mathcal{O}で出力できます．

注意 1.1.2. 位相空間は，集合と位相の組のことを言います．感覚的には，$\mathcal{O}$ が備わっている集合 S と捉えられます．集合 S が $\mathcal{O}$ の元たちによって区切られているイメージです．ただ，混乱の恐れがないときは，位相空間 $(S, \mathcal{O})$ を単に S と書くことがあり

[*1] intersection や union をとる操作で閉じているという意味で良い感じです．

ます．多くの場合，集合に位相や群の演算，ノルムなど色々な構造が入っている状況を考えるので，全て書いていたら逆に煩わしいですから，これは合理的な略記と言えるでしょう．

注意 1.1.3. 定義 1.1.1 の (ii) では有限個の O_i に関する共通部分を取っていますが，(iii) では無限個の O_λ に関する和集合を取っています．また，Λ は (非可算かもしれない) 無限集合を表すので，例えば (iii) を

$$\{O_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{O} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \in \mathcal{O}$$

と書くのは誤りです．

注意 1.1.4. 初見では混乱しがちですが，$x \in (S, \mathcal{O})$ に対し，$x \in \mathcal{O}$ ではありません．正しくは $x \in O \in \mathcal{O}$ です．また，$\mathcal{O} \subseteq \mathscr{P}(S)$ にも注意してください．

これを日本に例えたものが次の例です．

ポイント 1.1.5. S を日本，$x \in S$ を微小な土地とする．S の区域の集合 $\mathcal{O}$ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{O}$ は S に位相構造を定めるという．

(i) “日本” は区域である．また，$\emptyset$ も区域である．

(ii) 有限個の区域に共通する地区もまた，区域になっている．

(iii) いくつかの（無限個でも良い）区域の合併もまた，区域になっている．

例 1.1.6. 有限集合 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ に対し，S の部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, S\}$$

で定義すると，$(S, \mathcal{O})$ は位相空間を成す．

例 1.1.7. Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ は位相空間である．

同じ集合に違う位相を入れることもできます．

例 1.1.8. $\mathbb{R}$ における開集合系 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{(-\infty, n) \subseteq \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

で定義すると，$(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ は位相空間を成す．

例 1.1.9. A を単位元を持つ可換環とし，$\operatorname{Spec} A$ を A の素イデアルの全体とする．このとき，閉集合が

$$V(E) = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid E \subseteq p\} \quad (E \subseteq A)$$

の形をした位相を，$\operatorname{Spec} A$ の **Zariski 位相**と言う．

開集合の量が多い位相のことを “強い” と表現します．

定義 1.1.10. 集合 S に二つの位相 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ が定義されているとする．このとき，

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$$

を満たすならば，位相 $\mathcal{O}$ は位相 $\mathcal{O}'$ よりも**弱い**，或いは位相 $\mathcal{O}'$ は位相 $\mathcal{O}$ よりも**強い**と言い，$\mathcal{O} \leq \mathcal{O}'$ と書く．

空でない任意の集合には，次の特殊な位相を入れることができます．位相空間の例として押さえておきましょう．

定義 1.1.11. 集合 $S(\neq \emptyset)$ における最も弱い位相を**密着位相**と言い，$\mathcal{O}_*$ と書く．また，S における最も強い位相を**離散空間**と言い，$\mathcal{O}^*$ と書く．一般に，密着位相は $\mathcal{O}_* = \{S, \emptyset\}$，離散位相は $\mathcal{O}^* = \mathscr{P}(S)$ である．

位相空間 $(S, \mathcal{O}_*), (S, \mathcal{O}^*)$ をそれぞれ**密着空間**，**離散空間**と言う．

閉集合は次のように定義されます．

定義 1.1.12. $(S, \mathcal{O})$ を位相空間とするとき，S のある開集合の補集合として表される集合を S の**閉集合**と言う．また，S の閉集合の全体を S の**閉集合系**と言い，$\mathcal{F}$ と書く．

$$\mathcal{F} = \{O^c \mid O \in \mathcal{O}\}$$

1.2 基本的な概念

位相空間の導入は済んだので，次に位相空間における内点や外点，開核などを定義していきます．

定義 1.2.1. $(S, \mathcal{O})$ を位相空間，M をその部分集合とする．このとき，M に含まれる開集合全体の和集合を M の**内部**と言い，M° と書く．また，M の内部に属する点を M の**内点**と言う．

定義 1.2.2. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間，M をその部分集合とする．このとき，M を含む閉集合全体の共通部分を M の**閉包**と言い，$\overline{M}$ と書く．また，M の閉包に属する点を M の**触点**と言う．

定義 1.2.3. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間，M をその部分集合とする．このとき，$(M^c)^\circ$ を M の**外部**と言い，M^e と書く．M の外部に属する点を M の**外点**と言う．

定義 1.2.4. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間，M をその部分集合とする．このとき，$\overline{M}\setminus M^\circ$ を M の**境界**と言い，∂M と書く．M の境界に属する点を M の**境界点**と言う．

定義 1.2.5. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間，M をその部分集合とする．このとき，$x\in\overline{M\setminus\{x\}}$ ならば，x は M の**集積点**であると言う．また，$x\in M$ が M の集積点ではないとき，x は M の**孤立点**であると言う．

集積点は，点が無数に密集している点のことです．もう既に，位相空間の持つ“極限らしさ”が感じられますね．

命題 1.2.6. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間，M をその部分集合とするとき，M の閉包 $\overline{M}$ は次の条件を満たす．

(i) $M\subseteq\overline{M}$.

(ii) $\overline{M}\in\mathcal{F}$.

(iii) $M\subseteq O, O\in\mathcal{F}\implies\overline{M}\subseteq O$.

(iii) は，“$\overline{M}$ は M を含み持つ閉集合の中で最小である”ことを主張しています．

命題 1.2.7. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間，M をその部分集合とするとき，M の内部 M° は次の条件を満たす．

(i) $M^\circ\subseteq M$.

(ii) $M^\circ\in\mathcal{O}$.

(iii) $O\subseteq M, O\in\mathcal{O}\implies O\subseteq M^\circ$.

(iii) は，“M° は M に含まれる開集合の中で最大である”ことを主張しています．

次に，近傍を定義していきます．近傍とは，その名の通り“ある点の付近”のことです．Euclid 空間では，微小な正数 $\varepsilon>0$ を用いて α の ε-近傍を $B_\varepsilon(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\{x\mid\|x-\alpha\|<\varepsilon\}$ と定

義できましたが，位相空間には距離が定義されていないのでそう上手くいきません．そこで，“自分の半径 50 km 未満” を “自分が属す都道府県” と言い換えます．

定義 1.2.8. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間，x を S の点とする．$V\subseteq S$ が $x\in V^\circ$ を満たすとき，V を x の**近傍**と言う．x を含む開集合を x の**開近傍**と言う．また，x の近傍の全体を x の**近傍系**と言い，$\boldsymbol{V}(x)$ と書く．

$$V\in\boldsymbol{V}(x)\iff x\in V^\circ.$$

命題 1.2.9. 位相空間 $(S,\mathcal{O})$ の各点 x の近傍系 $\boldsymbol{V}(x)$ は，次を満たす．

(i) $^\forall V\in\boldsymbol{V}(x),\quad x\in V.$

(ii) $^\forall V\in\boldsymbol{V}(x),{}^\forall V'\in\mathscr{P}(S),\quad V\subseteq V'\implies V'\in\boldsymbol{V}(x).$

(iii) $^\forall V\in\boldsymbol{V}(x),{}^\forall V'\in\boldsymbol{V}(x),\quad V\cap V'\in\boldsymbol{V}(x).$

(iv) $^\forall V\in\boldsymbol{V}(x),{}^\exists W\in\boldsymbol{V}(x),{}^\forall y\in W,\quad V\in\boldsymbol{V}(y).$

注意 1.2.10. 定義 1.2.8 と命題 1.2.9 の条件は，実は同値で，命題 1.2.9 を定義としている数学書もあります．こちらの方が公理的主義に沿っている気がして個人的には好きなのですが，本稿は入門書としての性格から，より直感的な方を定義に採用しました．

定義 1.2.11. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間，$\boldsymbol{V}(x)$ を $x\in S$ の近傍系とする．$\boldsymbol{V}(x)$ の部分集合 $\boldsymbol{V}^*(x)$ で次の性質を持つものを，x の**基本近傍系**と言う．

$$^\forall V\in\boldsymbol{V}(x),{}^\exists U\in\boldsymbol{V}^*(x),\quad U\subseteq V.$$

x の基本近傍系 $\boldsymbol{V}^*(x)$ から次のようにして $\boldsymbol{V}(x)$ を復元できます．

$$\boldsymbol{V}(x)=\{V\mid{}^\exists U\in\boldsymbol{V}^*(x),\quad U\subseteq V\}.$$

つまり，基本近傍系とは近傍系から本質的でない情報を削ぎ落としたものだと言えます．

ところで，位相を定義するにはどうすれば良いでしょうか？ 最初のセクションでは，“位相の元を全て書き表わす” ことによって位相を定義しましたが，開基という概念を導入すれば，より明快な方法で位相を定義できます．

定義 1.2.12. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間とする．このとき，

$$\mathcal{O}=\left\{\bigcup\mathcal{A}\;\middle|\;\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}\right\}$$

を満たす $\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{B}$ を，$\mathcal{O}$ の**開基**と言う．

注意 1.2.13. 一般に，与えられた位相空間の開基は一意に定まりません．

例 1.2.14. Euclid 空間 $\mathbb{R}$ の開基として $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ がとれる．

例 1.2.15. 離散空間 S の開基として $\{\{x\} \mid x \in S\}$ がとれる．

要するに，開基とは，無限個の和集合を取ることを許したとき，位相と同等の情報を持つものです．イメージとしては，ベクトル空間における基底のようなものでしょう．そういった意味で，開基は位相を構成するのに十分な情報を持っている集合と言えます．

でも実は，もっと少ない情報だけでも位相を構築することができます．都道府県を全て列挙しなくても，都道府県の境界線さえ指定してしまえば日本を区切られるからです．

定義 1.2.16. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が $(S,\mathcal{O})$ の**準開基**であるとは，

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, S_i \in \mathcal{S} \right\}$$

が $(S,\mathcal{O})$ の開基となっていることを言う．

注意 1.2.17. 準開基も，開基に対し一意的に定まりません．

例 1.2.18. Euclid 空間 $\mathbb{R}$ の準開基として $\{(a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ がとれる．

準開基とは，有限個の共通部分を取ることを許したとき，開基と同等の情報を持つもののことです．

1.3 連続写像と同相

このセクションでは，位相空間における極限に関する概念を見ていきます．まずは点列の定義から確認していきましょう．

定義 1.3.1. 位相空間 $(S,\mathcal{O})$ において，写像 $a\colon \mathbb{N} \to S$ を S の**点列**と言う．この点列 a を，

$$a_n = a(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおくことにより $\{a_n\}$ と表す．

点列は，上記のように写像として定義されます．点列自体は，位相空間でない一般の集合に対しても定義されますが，以下では主に位相空間上のものについて考えます．

定義 1.3.2. 位相空間 $(S, \mathcal{O})$ の点列 $\{a_n\}$ と S の点 α について，

$$^\forall V \in \boldsymbol{V}(\alpha), {}^\exists N > 0, {}^\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies a_n \in V$$

を満たすとき，$\{a_n\}$ は α に**収束する**と言い，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ または $a_n \to \alpha$ と表す．このとき，α を $\{a_n\}$ の**極限点**と言う．

距離空間では “α との距離が限りなく小さくなる” と表現するところを，位相空間では “α と同じ地方，同じ県，同じ区，同じ市，同じ町，同じ村に属す” と言った要領で，近傍を小さくしていくことで表現しています．

或いは，Euclid 空間では許容範囲として ε-近傍を与えたが，位相空間では代わりに α の近傍系 $\boldsymbol{V}(\alpha)$ を与えたと捉えても良いでしょう．

ポイント 1.3.3.

$$\begin{array}{c} ^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N > 0, {}^\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies \|a_n - \alpha\| < \varepsilon \\ \downarrow \text{近傍} \\ ^\forall B_\varepsilon(\alpha), {}^\exists N > 0, {}^\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies a_n \in B_\varepsilon(\alpha) \\ \downarrow \text{拡張解釈} \\ ^\forall V \in \boldsymbol{V}(\alpha), {}^\exists N > 0, {}^\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies a_n \in V \end{array}$$

注意 1.3.4. Euclid 空間では，点列の極限は存在すれば一意的でしたが，一般の位相空間でこれは成り立ちません．[a]

[a] Hausdorff 空間であれば，点列の極限は一意的です．詳しくは後ほど (後日公開の章) 説明します．

次に，位相空間における連続関数について見ていきます．命題 1.3.5 が肝となります．[*2]

命題 1.3.5. 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対し，次の (i) から (v) は全て同値である．

(i) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は連続である．

(ii) $^\forall \varepsilon > 0, {}^\forall x \in \mathbb{R}^n, {}^\exists \delta > 0, {}^\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$

(iii) $^\forall \varepsilon > 0, {}^\forall x \in \mathbb{R}^n, {}^\exists \delta > 0, {}^\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad y \in B_\delta(x) \implies f(y) \in B_\varepsilon(f(x)).$

[*2] 既に微分積分学で習ったかもしれませんが，念のため復習しておきます．

(iv) ${}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\forall}x \in \mathbb{R}^n, {}^{\exists}\delta > 0, \quad f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$.

(v) 任意の開集合 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ に対し，その逆像 $f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

証明. (i) $\iff$ (ii) は連続の定義，(ii) $\iff$ (iii) は ε-近傍の定義から，(iii) $\iff$ (iv) は写像の像と部分集合の定義から従う．

次に，(iv) $\implies$ (v) を示す．開集合 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ を任意に取り，f によるその逆像の点 $x \in f^{-1}(U)$ を任意に取る．このとき，U は開集合だから，

$$B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$$

となる ε-近傍 $B_\varepsilon(f(x))$ が取れる．

ここで仮定より，

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$$

となる δ-近傍 $B_\delta(x)$ が取れる．ゆえに，$f(B_\delta(x)) \subseteq U$ となって，$B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$ が従う．

最後に，(v) $\implies$ (iv) を示す．$\mathbb{R}^m$ の開集合として，ε-近傍 $B_\varepsilon(f(x))$ を取る．このとき，

$$x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$$

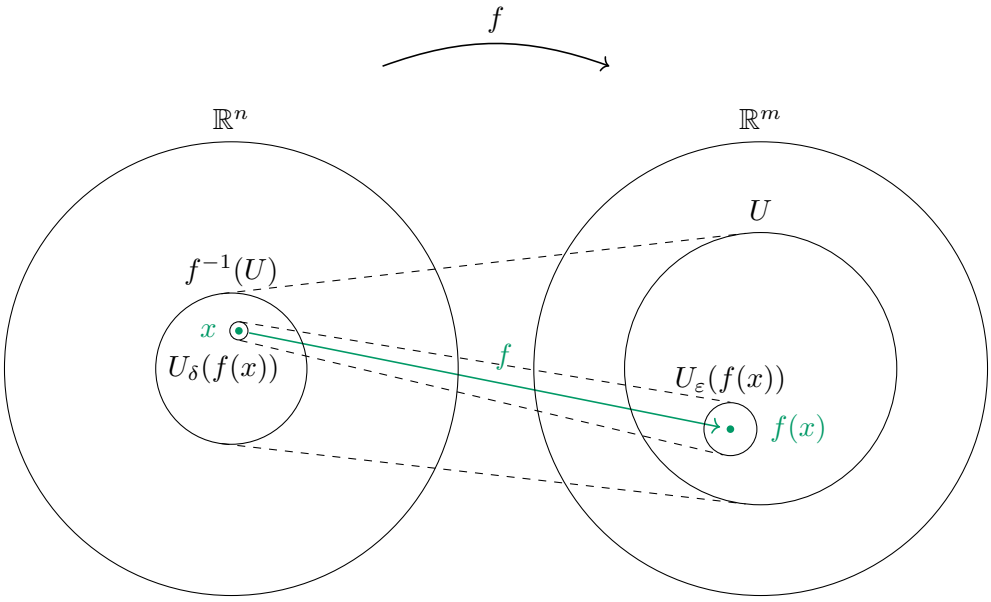
であるから，仮定より，

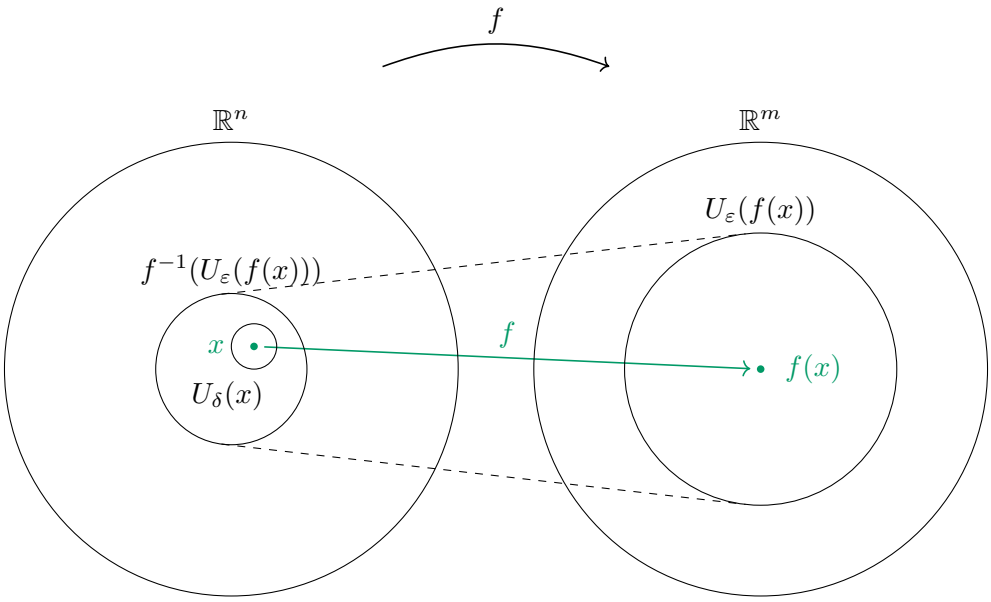
$$B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$$

となる δ-近傍 $U_\delta(x)$ が取れる．ゆえに，逆像の定義から，

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

が従う． □





命題 1.3.5 の (v) から，Euclid 空間において写像が連続かどうかは，“$f^{-1}(U)$ が開集合かどうか” だけを見れば良いことがわかります．このアイデアを位相空間に輸入することで，位相空間における写像の連続性が定義されます．

定義 1.3.6. $(S,\mathcal{O})$, $(S',\mathcal{O}')$ を位相空間とし，$f\colon S\to S'$ を写像とする．この写像 f が

$$^\forall O'\subseteq S',\quad O'\in\mathcal{O}'\implies f^{-1}(O')\in\mathcal{O}$$

を満たすとき，f は S から S' への**連続写像**であると言う．

この定義は，命題 1.3.5 の (v) を位相空間の言葉で言い換えただけですね．

注意 1.3.7. 連続写像の定義において，$(S,\mathcal{O})$ が離散空間ならば f は連続です．また，$(S',\mathcal{O}')$ が密着空間ならば f は連続です．

ポイント 1.3.8.

$$
\begin{array}{c}
{}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\forall}x \in \mathbb{R}^n, {}^{\exists}\delta > 0, {}^{\forall}y \in \mathbb{R}^n, \quad \|x-y\| < \delta \implies \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon \\
\Big\downarrow \text{近傍} \\
{}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\forall}x \in \mathbb{R}^n, {}^{\exists}\delta > 0, {}^{\forall}y \in \mathbb{R}^n, \quad y \in B_\delta(x) \implies f(y) \in B_\varepsilon(f(x)) \\
\Big\downarrow \text{部分集合・像} \\
{}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\forall}x \in \mathbb{R}^n, {}^{\exists}\delta > 0, \quad f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \\
\Big\downarrow \text{命題 1.3.5} \\
{}^{\forall}U \subseteq \mathbb{R}^m, \quad U \text{ は開集合} \implies f^{-1}(U) \text{ は開集合} \\
\Big\downarrow \text{拡張解釈} \\
{}^{\forall}O' \subseteq S', \quad O' \in \mathcal{O}' \implies f^{-1}(O') \in \mathcal{O}
\end{array}
$$

連続写像は “近傍を保つ写像” です．すなわち，位相空間 $(S, \mathcal{O})$ と $(S', \mathcal{O}')$ の間に連続写像が存在するとき，$(S, \mathcal{O})$ の情報は $(S', \mathcal{O}')$ にある程度引き継がれていると言えます．特に，連続写像 f が全単射で，逆写像 f^{-1} も連続であるとき，f は位相空間の全ての情報を引き継ぎます．

定義 1.3.9. $(S, \mathcal{O}), (S', \mathcal{O}')$ を位相空間とする．$f\colon S \to S'$ が全単射であって，かつ f と f^{-1} が共に連続写像であるとき，f を S から S' への**同相写像**と言う．S と S' の間に，少なくとも一つ同相写像が存在するとき，S と S' は**同相**であると言い，$S \approx S'$ と書く．

注意 1.3.10. 全単射な群準同型は，条件を課さなくても逆像が自動的に群準同型になりますが，同相写像の場合そうもいきません．同相写像の定義においては，f^{-1} の連続性が必要です．この事実は，圏論における isomorphism の定義によく反映されています．

位相空間 $(S, \mathcal{O})$ と $(S', \mathcal{O}')$ の間に同相写像が存在するとき，$(S, \mathcal{O})$ と $(S', \mathcal{O}')$ は位相空間としては全く同じであると見做せる訳です．

同相関係はもちろん同値関係です．

命題 1.3.11. 同相関係 $\approx$ は同値関係である．すなわち，

(i) $S \approx S$

(ii) $S \approx S' \implies S' \approx S$

(iii) $S \approx S', S' \approx S'' \implies S \approx S''$

を満たす.

ドーナツとマグカップを同一視することで有名な位相幾何学において，“何を同一視するか” は最も本質的で重要な問題の一つです．ここを取り違えてしまっては，何の議論も意味を意味を成しません．一見当たり前に見える定義 1.3.9 は，極めて重要な取り決めなのです.

1.4 誘導位相

このセクションでは，色々な位相を “自然に” 定義することを考えます．定義の “自然さ” を如何にして数学的に表現するかが鍵となります．また，それらの定義が誘導位相によって統一的な言葉で表現できることを説明します.

定義 1.4.1. $(S, \mathcal{O})$ を位相空間とし，M を S の部分集合とする．M の部分集合族 $\mathcal{O}_M \subseteq \mathscr{P}(M)$ を

$$\mathcal{O}_M = \{U \cap M \mid U \in \mathcal{O}\}$$

で定義し，$\mathcal{O}_M$ を M における $\mathcal{O}$ の**相対位相**と言う．また，位相空間 $(M, \mathcal{O}_M)$ を**部分空間**と言う.

問 1.4.2. この定義 1.4.1 で定まる $\mathcal{O}_M$ が M の位相になっていることを確かめよ.

証明. $\mathcal{O}_M$ が位相の定義を満たしていることを確認する.

(i) $\emptyset = \emptyset \cap M, M = S \cap M$ より $\emptyset, M \in \mathcal{O}_M$ である.

(ii) $\{O_i\}_{i=1}^n$ を $\mathcal{O}_M$ の元の族とすると，各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して，$O_i = U_i \cap M$ を満たす $U_i \in \mathcal{O}$ を取れる．このとき，

$$\bigcap_{i=1}^n O_i = \bigcap_{i=1}^n (U_i \cap M) = \left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right) \cap M$$

となるが，$\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$ であるから，$\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{O}_M$ である.

(iii) $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathcal{O}_M$ の元の族とすると，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$O_\lambda = U_\lambda \cap M$ を満たす $U_\lambda \in \mathcal{O}$ を取れる．このとき，

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap M) = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) \cap M$$

となるが，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ であるから，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}_M$ である.

□

要するに，$(S,\mathcal{O})$ を M で丸ごとくり抜いた $(M,\mathcal{O}_M)$ もまた，位相空間になっている訳です．

命題 1.4.3. $(S,\mathcal{O}),(S',\mathcal{O}')$ を位相空間，$f\colon S\to S'$ を連続写像とする．$M\subseteq S$ とするとき，f の定義域を M に制限した写像 $f|_M\colon M\to S'$ は連続である．

証明. 任意の $U'\in\mathcal{O}'$ に対し，${f|_M}^{-1}(U')=f^{-1}(U')\cap M$ であるから，$f|_M$ は連続写像の定義を満たす． □

次に，位相空間の族が与えられたとき，それらの台集合の直積に位相を定義する方法を考えます．

定義 1.4.4. $\{(S_\lambda,\mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族，$S=\prod_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda$ を台集合の族の直積，$\mathrm{pr}_\lambda\colon S\twoheadrightarrow S_\lambda$ を射影とする．このとき，Λ の任意の有限個の相異なる元 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ と任意の $O_{\lambda_i}\in\mathcal{O}_{\lambda_i}\quad(i=1,\dots,n)$ によって

$$\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i})=\left(\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}}S_\lambda\right)\times\prod_{i=1}^{n}O_{\lambda_i}$$

で表される S の部分集合全体を開基とする位相 $\mathcal{O}$ を，S の**直積位相**と言う．また，位相空間 $(S,\mathcal{O})$ を**直積空間**と言う．

一見難しそうな定義ですが，Λ が有限 (例えば 2 次元) のときを考えるとイメージしやすいと思います．$\prod_i O_{\lambda_i}$ は，テレビ画面で言う一画素です．既存の画素の直積集合を開基に持つ位相が直積位相です．

同値関係による商集合に位相を入れる方法も，次のようなものが考えられます．

定義 1.4.5. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間，$\sim$ を集合 S 上の同値関係，$\pi\colon S\twoheadrightarrow S/\!\sim$ を自然な射影とする．このとき，$S/\!\sim$ の部分集合族 $\mathcal{O}'$ を

$$\mathcal{O}'=\{O\subseteq S/\!\sim\mid\pi^{-1}(O)\in\mathcal{O}\}$$

で定義し，$\mathcal{O}'$ を π によって誘導される**商位相**と言う．また，位相空間 $(S/\!\sim,\mathcal{O}')$ を**商空間**と言う．

直和集合は “集合を張り合わせたもの” なので，“開集合を張り合わせたような部分集合” を集めれば上手くいきます．

定義 1.4.6. $\{(S_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族，$S = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ を台集合の族の直和とする．このとき，このとき，S の部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{O \subseteq S \mid {}^\forall\lambda \in \Lambda, \quad O \cap S_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda\}$$

で定義し，$\mathcal{O}$ を S の**直和位相**と言う．また，位相空間 $(S, \mathcal{O})$ を**直和空間**と言う．

直積空間の開集合の一般形を記述するのは困難ですが，定義 1.4.4 のように，直積空間の開基なら射影を使って簡単に表すことができます．射影は直積の情報の一部を抜き出す写像なので，“直積を語るのに射影は必要不可欠だ” と言えるかもしれません．同様のことは，商集合における自然な射影，直和集合における標準的単射などにも言えます．これらの情報を抜き出す (或いは埋め込む) 写像は，基本的な概念でありながら非常に重要です．それは，定義以下の議論を見れば少し実感できるはずです．

定義 1.4.7. S を集合，$\{(S'_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族，$\{f_\lambda \colon S \to S'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を写像の族とする．このとき，全ての f_λ を連続にする S 上の最弱の位相 $\mathcal{O}_S$ を，$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって誘導される**始位相**と言う．

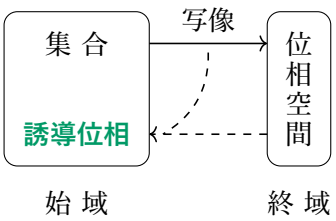
注意 1.4.8. 定義 1.4.7 を満たすような $\mathcal{O}_S$ はちゃんと存在します．実際，$\mathcal{O}_S$ を

$$\mathcal{O}_S = \{f^{-1}(U') \mid U' \in \mathcal{O}'\}$$

で定義すれば良いです．

定義 1.4.9. $\{(S_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族，S' を集合，$\{f_\lambda \colon S_\lambda \to S'\}_{\lambda\in\Lambda}$ を写像の族とする．このとき，全ての f_λ を連続にする S' 上の最強の位相 $\mathcal{O}_{S'}$ を，$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって誘導される**終位相**と言う．

写像と終域の位相空間が，始域の集合に新たな位相を誘導しているイメージです．



例 1.4.10. $(S, \mathcal{O})$ を位相空間，M を S の部分集合とし，$\iota \colon M \hookrightarrow S$ を標準的単射とする．このとき，M における $\mathcal{O}$ の相対位相 $\mathcal{O}_M$ は，ι によって誘導される始位相である．

例 1.4.11. $\{(S_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族，$S = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ を台集合の族の直積，$\mathrm{pr}_\lambda\colon S \twoheadrightarrow S_\lambda$ を射影とする．このとき，S の直積位相 $\mathcal{O}$ は，$\{\mathrm{pr}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって誘導される始位相である．

例 1.4.12. $(S, \mathcal{O})$ を位相空間，$\sim$ を集合 S 上の同値関係，$\pi\colon S \twoheadrightarrow S/\!\sim$ を自然な射影とする．このとき，S の商位相 $\mathcal{O}'$ は，π によって誘導される終位相である．

例 1.4.13. $\{(S_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族，$S = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ を台集合の族の直和，$\iota_\lambda\colon S_\lambda \hookrightarrow S$ を標準的単射とする．このとき，S の直和位相 $\mathcal{O}$ は，$\{\iota_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって誘導される終位相である．

誘導位相の概念により，今までに定義した相対位相や直積位相，商位相などが “自然” なものであることが理解できたのではないでしょうか．任意の集合には，密着位相と離散位相を入れることができますが，この意味で “自然” ではないのです．

1.5 コンパクト性

和集合や共通部分を考えるときには，注意しなければならないことがあります．

例 1.5.1. $a < b$ を満たす $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，

$$I_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

とすると，$I_1 = [a, b]$ である．すなわち，開集合の共通部分は閉集合になり得る．

また，

$$I_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$$

とすると，$I_2 = (a, b)$ である．すなわち，閉集合の和集合は開集合になり得る．

さらに，

$$I_3 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} [-n, n]$$

とすると，$I_3 = \mathbb{R}$ である．これは開 (かつ閉) 集合である．[a]

[a] 開集合でもあり閉集合でもある集合については後述します．

この例から分かるように，位相空間 $(S, \mathcal{O})$ について考えるとき，

無限個の開集合に関する議論が必要か？

が非常に重要になってきます．もし，S に関する議論をするときに無限個の開集合を使わざるを得ないのであれば，先程のような直感に反するような事態に注意して議論を進めなくてはなりません．そうなると当然，有限性を仮定する必要のある定理・命題は使えなくなります．裏を返せば，S について議論する際有限個の開集合についてだけ考えれば事足りるなら，より“おいしい”定理・命題が成り立ってくれそうです．

そこで，有限個の開集合についてだけ考えれば事足りることが保証された位相空間を次のように定義します．

定義 1.5.2. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{U}\subseteq\mathcal{O}$ が

$$S=\bigcup\mathcal{U}$$

を満たすとき，$\mathcal{U}$ は S の**開被覆**であると言う．また，S の開被覆 $\mathcal{U}$ が有限集合であるとき，$\mathcal{U}$ を S の**有限被覆**と言う．

S の任意の開被覆が必ず有限被覆を部分集合として含み持つとき，S は**コンパクト**であると言う．

全く同じことですが，これを噛み砕いた定義も載せておきます．

ポイント 1.5.3. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間とする．S が

$$S=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\quad(O_\lambda\in\mathcal{O})$$

と表されるとき，O_λ から n 個（有限個）の開集合 $O_{\lambda_1},O_{\lambda_2},\dots,O_{\lambda_n}$ を選んで，

$$S=\bigcup_{k=1}^{n}O_{\lambda_k}$$

とできるとき，S はコンパクトであると言う．

注意 1.5.4. ポイント 1.5.3 において，$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は任意に取らなければなりません．すなわち，どんな開被覆をとろうと，その中から有限個の開集合を pick up すれば有限被覆にまで間伐できることを要求しているのです．

コンパクト性は，S の部分集合に対しても定義されます．

定義 1.5.5. $(S,\mathcal{O})$ を位相空間，$M\subseteq S$ をその部分集合とする．$\mathcal{U}\subseteq\mathcal{O}$ が

$$M\subseteq\bigcup\mathcal{U}$$

を満たすとき，$\mathcal{U}$ は S における M の**開被覆**であると言う．

S における M の任意の開被覆が必ず M の有限被覆を部分集合として含み持つと

き，M は S の**コンパクト集合**であると言う．

$(S, \mathcal{O})$ がコンパクトであるならば，もう無限の落とし穴に怯える必要はありません．議論に必要な開集合は高々有限個なのです．

コンパクト性に関する簡単な命題を見ていきましょう．

命題 1.5.6. コンパクト空間の任意の閉集合はコンパクトである．

証明. S をコンパクト空間，$M \subseteq S$ をその閉集合とする．M の S における開被覆 $\mathcal{U}_M$ を任意に取る．$S \setminus M$ は開集合であるから，$\mathcal{U}_S = \mathcal{U}_M \cup \{S \setminus M\}$ は S の開被覆である．ここで，S のコンパクト性より，$\mathcal{U}_S$ の有限被覆 $\mathcal{U}'_S \subseteq \mathcal{U}_S$ が存在する．このとき，$\mathcal{U}'_S \setminus \{S \setminus M\}$ は M の有限被覆である． □

全射な連続写像はコンパクト性を保ちます．

命題 1.5.7. $(S, \mathcal{O}_S)$ をコンパクトな位相空間，$(S', \mathcal{O}_{S'})$ を位相空間とし，$f\colon S \to S'$ を連続な全射とする．このとき，$(S', \mathcal{O}_{S'})$ はコンパクトである．

証明. $\mathcal{U}_{S'}$ を S' の開被覆とする．f は連続であるから，$\mathcal{U}_S = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}_{S'}\}$ は S の開被覆である．ここで，S のコンパクト性から，$\mathcal{U}_S$ から有限個の元

$$f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_n)$$

を選んで，

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i)$$

とできる．f は全射なので，$\{U_1, U_2 \ldots, U_n\}$ は S' の有限被覆になっている． □

1.6 Coming Soon...

References

[1] 新井敏康，集合・論理と位相，東京図書
[2] 大田春外，深めよう位相空間，日本評論社
[3] 松坂和夫，集合・位相入門，岩波書店

10242026 Ver.1.6

Copyright (c) 2026 Zundamorphism All Rights Reserved.