Ring Theory

完全系列の入門から基礎まで

October 2026

$\mathbb{Z}$undamϕrphism

Contents

Chapter 1 基礎 **3**

1.1 加群の準同型定理 3

1.2 完全系列の分裂 6

1.3 射影的加群 8

1.4 図式の追跡 11

References **12**

(i) 本コンテンツに関する著作権その他の知的財産権は，すべて著作者に帰属します．著作権法で認められている私的利用の範囲を超えて，本コンテンツの全部または一部を無断で複製，転載，改変，販売，配布する等の行為は一切禁止しております．
(ii) 権利者の許諾なく (i) に違反する行為またはこれに準ずる行為が行われていることが発覚した場合には，法的措置をとらせていただく場合がございます．
(iii) 万が一内容の誤りによって損害やトラブルが発生した場合でも，当方では責任を負いかねます．
(iv) 誤植やご意見等ございましたら，zundamorphism@icloud.com までご連絡いただけますと幸いです．

Chapter 1

基礎

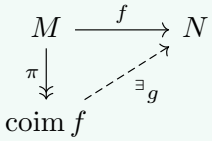
1.1 加群の準同型定理

まずは，加群の準同型定理について復習しておきましょう．

定理 1.1.1. A を環，M, N を左 A 加群，$f\colon M \to N$ を準同型とする．このとき，

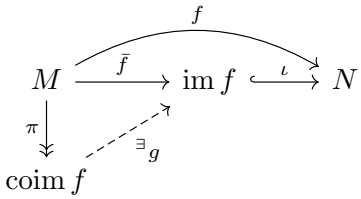
$$\operatorname{coim} f \cong \operatorname{im} f \quad \text{i.e.} \quad M/\ker f \cong \operatorname{im} f$$

が成り立つ．



$\operatorname{coim} f \overset{\text{def}}{=} M/\ker f$ です．i.e. は “すなわち” を意味します．

f の終域を N の代わりに $\operatorname{im} f$ としたものを $\bar{f}$ とすると，$\bar{f}$ は全射になります．さらに，$\iota\colon \operatorname{im} f \to N$ を標準的単射とすると，先ほどの図式は以下のようになります．



この図式を見ると，この定理は，準同型 f が全射 $\pi\colon M \to \operatorname{coim} f$ と単射 $\iota\colon \operatorname{im} f \to N$ に “分解” できることを主張しているとも捉えられます．この図式の一部を一列に並べてみましょう．

$$M \xrightarrow{\pi} \operatorname{coim} f \xrightarrow{g} \operatorname{im} f \xhookrightarrow{\iota} N$$

すると，準同型の列が得られました．このような準同型の列のことを系列と言います．この系列を，よりシンプルに記述することが目標です．

定義 1.1.2. A を環とするとき，左 A 加群の準同型の列

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$$

を**系列**と言う．この系列 $M_\bullet$ が

$$\ker f_n = \operatorname{im} f_{n+1}$$

を満たすとき，系列 $M_\bullet$ は M_n で**完全** (exact) であると言う．任意の n について M_n で完全な系列を**完全系列** (exact sequence) と言う．

注意 1.1.3. この “完全性” という定義は，

$$f_n \circ f_{n+1} = 0$$

を満たすように設計されています．ただし，0 は零写像，すなわち任意の定義域の元を 0 に移す写像のことです．ゼロ写像は，文脈から明らかな場合ラベルを描きません．例えば，

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{0} 0$$

の代わりに

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

と書いたりします．

注意 1.1.4. 系列が完全であることを

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{m} U \xrightarrow{a} N \xrightarrow{t} D \xrightarrow{h} A \qquad \text{(exact)}$$

のように，図式の右端に (exact) と書いて表すことが多いです．

要するに，完全性は “情報を引き継ぎすぎない写像の列” のことです．$\ker f_n = \operatorname{im} f_{n+1}$ という条件によって，f_{n+1} の情報が f_n で 0 に潰れ，M_{n-1} 以降に引き継がれないように設計されています．

完全系列は長いほど情報量が多い訳ですが，それを調べるのは大変です．完全系列の中でも，次の短完全系列が基本になります．

定義 1.1.5. 完全系列のうち，3 つの加群からなるものを**短完全列**と言う．

$$0 \xrightarrow{0} M_2 \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \xrightarrow{0} 0 \qquad \text{(exact)}$$

さて，準備ができたところで，準同型定理の主張を完全性を用いて書き換えてみます．

ポイント 1.1.6. A を環，M, N を左 A 加群，$f\colon M \to N$ を準同型とする．また，$\iota\colon \ker f \to M$ を標準的単射，$\bar{f}\colon M \to \operatorname{im} f$ を，f の終域を $\operatorname{im} f$ に制限したものとする．このとき，準同型定理の主張は

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{im} f \longrightarrow 0$$

が完全であることに対応する．

これを一般化した次の命題も成り立ちます．

命題 1.1.7. 左 A 加群の系列

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \longrightarrow 0$$

に関して，

(i) M_0 で完全 $\iff$ f_1 が全射．

(ii) M_2 で完全 $\iff$ f_2 が単射．

(iii) 系列全体が短完全列 $\iff$ f_2 は単射であり，$M_0 \cong M_1/M_2$．

が成り立つ．

証明．(i), (ii) は全射，単射の定義から直ちに従う．(iii) は f_2 が単射であるとき，$\ker f_1 = \operatorname{im} f_2 = M_2$ なので，準同型定理より $\operatorname{im} f_1 \cong M_1/M_2$ であるが，f_1 は全射であるから $M_0 \cong M_1/M_2$． □

次のようにして完全系列を作ることができます．

命題 1.1.8. A を環，M, N を左 A 加群，$f\colon M \to N$ を準同型とするとき，以下の完全系列が存在する．

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} \operatorname{im} f \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} f \longrightarrow N \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

証明．後日公開． □

実は，次元定理も短完全列を用いて書き換えられます，

定理 1.1.9. k を体，M を k ベクトル空間とする．完全系列

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

が存在するならば，

$$\dim_k M_1 = \dim_k M_2 + \dim_k M_0.$$

ここまでによって，完全系列が “いい感じ” のものであることが実感できたと思います．次のセクションでは，さらに “いい” 条件について考えていきます．

1.2 完全系列の分裂

次のような例を考えてみましょう．

例 1.2.1. 写像 f_1, f_2 を次で定める．

$$\begin{array}{ccccc} f_2\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \qquad f_1\colon \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & \cup & & \cup & \qquad\quad \cup \qquad\quad \cup \\ & x & \longmapsto & (x,0,0) & \qquad\quad (x,y,z) \longmapsto (y,z) \end{array}$$

このとき，

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^2 \longrightarrow 0$$

は $\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ に “分解” していると言える．

f は実数を $\mathbb{R}^3$ の x 座標に埋め込む写像，g は x 座標を忘れる写像です．この系列は，ただの完全系列よりも情報を “綺麗に” 分解できています．これを厳密に書いたものが次の定義です．

定義 1.2.2. 左 A 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

に関して，部分加群 $M_0' \subseteq M_1$ が存在して，

$$M_0 \cong M_0', \quad M_1 = f_2(M_2) \oplus M_0', \quad f_1(M_0') = M_0$$

となるとき，与えられた短完全列は**分裂**すると言う．

すなわち，分裂とは，自然な単射 $M_2 \hookrightarrow M_0 \oplus M_2$ と自然な射影 $M_0 \oplus M_2 \twoheadrightarrow M_0$ による同一視で $M_1 \cong M_0 \oplus M_2$ となることを言っているのです．

次の命題は，分裂の同値な条件を与えます．

定理 1.2.3 (分裂補題)**.** 左 A 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_2 \underset{g_2}{\overset{f_2}{\rightleftarrows}} M_1 \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} M_0 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

に関して，以下は同値である．

(i) 与えられた短完全列は分裂する．

(ii) 準同型 $g_1\colon M_0 \to M_1$ が存在して $f_1 \circ g_1 = \mathrm{id}_{M_0}$.

(iii) 準同型 $g_2\colon M_1 \to M_2$ が存在して $g_2 \circ f_2 = \mathrm{id}_{M_2}$.

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) を示す．$f_1|_{M_0'}\colon M_0' \to M_0$ の逆写像 f_1^{-1} と自然な単射 $\iota\colon M_0' \hookrightarrow M_1$ を用いて $g_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \iota \circ f_1^{-1}$ とすればよい．

$$M_0 \xrightarrow{f_1^{-1}} M_0' \xhookrightarrow{\iota} M_1$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す．$M_0' \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname{im} g_1$ とすれば上手くいく．

実際，仮定から $f_1 \circ g_1$ は単射であるから g_1 も単射で[*1]，これより $M_0 \cong M_0'$ が従う．また，$f_1(M_0') = f_1(\operatorname{im} g_1) = (f_1 \circ g_1)(M_0) = M_0$ である．

$x \in M_1$ に対し $x = (x - (g_1 \circ f_1)(x)) + ((g_1 \circ f_1)(x))$ と分解できるから，$x \in \operatorname{im} f_2 + M_0'$ である．[*2]$x \in \operatorname{im} f_2 \cap M_0'$ とすると，完全性より $\operatorname{im} f_2 = \ker f_1$ であるから，$f_1(x) = 0$ となる．ここで $x \in M_0' = \operatorname{im} g_1$ より $x = g_1(m_0)$ となる $m_0 \in M_0$ がとれる．$f_1(x) = f_1(g_1(m_0)) = m_0$ と $f_1(x) = 0$ とを合わせて $f_1(x) = 0$ を得る．すなわち，$\operatorname{im} f_2 \cap M_0' = f_2(M_2) \cap M_0' = \{0\}$ である．以上から $M_1 = f_2(M_2) \oplus M_0'$ が従う．

(i) $\Longrightarrow$ (iii) を示す．$f_2\colon M_2 \to M_1$ の終域を $f_2(M_2)$ に制限した写像の逆写像 $f_2^{-1}\colon f_2(M_2) \to M_2$ と正射影 $\pi\colon f_2(M_2) \oplus M_0' \twoheadrightarrow f_2(M_2)$ を用いて $g_2 \overset{\mathrm{def}}{=} f_2^{-1} \circ \pi$ とすればよい．

$$M_1 \xrightarrow{\pi} f_2(M_2) \xrightarrow{f_2^{-1}} M_2$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) を示す．$M_0' \overset{\mathrm{def}}{=} \ker g_2$ とする．$M_1 = f_2(M_2) \oplus M_0'$ は同様にして示せる．

$f_1(M_0') = M_0$ を示す．$\subseteq$ は明らか．$m_0 \in M_0$ を任意にとる．f_1 は全射だから，$f_1(m_1) = m_0$ となる $m_1 \in M_1$ がとれる．ここで $m_1 = f_2(m_2) + m_0' \quad (m_2 \in M_2, m_0' \in M_0')$ と書けることに注意すると，$f_1(m_1) = f_1 \circ f_2(m_2) + f_1(m_0') = m_0$ となる．これで $\supseteq$ も言えた．

$f_1|_{M_0'}(x) = 0 \quad (x \in M_0')$ とすると，$x \in \ker f_1 = \operatorname{im} f_2$ である．一方，$\operatorname{im} f_2 \cap M_0' = \{0\}$ なので $x = 0$，すなわち $f_1|_{M_0'}$ は単射である．従って，$M_0' \cong M_0$ を得る． □

[*1] 写像 $f \circ g$ が単射ならば，g は単射.

[*2] $f_1(x - (g_1 \circ f_1)) = 0$ より，$x - (g_1 \circ f_1) \in \ker f_1 = \operatorname{im} f_2$ が，$(g_1 \circ f_1)(x) \in M_0'$ は g_1 の像であることから従う.

1.3 射影的加群

この節では射影的加群というものを定義し，それが完全系列の分裂と関係があることを見ていきます．

定義 1.3.1. A を環とする．左 A 加群 P が**射影的**であるとは，左 A 加群の任意の完全系列

$$M_1 \xrightarrow{f} M_0 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

と準同型 $g\colon P \to M_0$ に対し，準同型 $h\colon P \to M_1$ が存在して，$g = f \circ h$ が成り立つことを言う．

$$\begin{array}{ccccc} & & & & P \\ & & \swarrow^{h} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M_1 & \xrightarrow[f]{} & M_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

これは，与えられた M_0 への準同型を，より広い M_1 を経由する準同型に持ち上げられるということです．

射影的でない例を見た方が分かりやすいかもしれません．

例 1.3.2. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は射影的加群ではない．

$\mathrm{id}(\overline{1}) = \overline{1}$ である．もしある h が存在して以下の図式が可換になるとすると，$h(\overline{1})$ は奇数でなくてはならない．一方，$h(\overline{1}) + h(\overline{1}) = h(\overline{1} + \overline{1}) = 0$ だから，$h(\overline{1}) = 0$ である．これは矛盾．

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & & \swarrow^{h} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

このように，“ある程度整列された加群” でないと加群の準同型を持ち上げることは出来ません．

この射影的という概念は，自由加群に絞って考えると実に明快な概念です．直和因子を以下のように定義すると，

定義 1.3.3. A を環，M を A 加群とする．M の部分 A 加群 M_0 が M の**直和因子**であるとは，部分 A 加群 M_1 が存在して以下が成り立つことを言う．

$$M = M_0 + M_1, \quad M_0 \cap M_1 = \{0\} \quad \text{i.e.} \quad M = M_0 \oplus M_1.$$

射影的加群は次のようなものであることが分かります.

定理 1.3.4. A を環とするとき，以下が成り立つ.

(i) 自由 A 加群は射影的である.

(ii) 射影的 A 加群はある自由 A 加群の直和因子である．逆に，自由 A 加群の直和因子は射影的 A 加群である.

証明.

(i) A は射影的 A 加群であり，自由加群は A の直和であるため，その直和因子は射影的である.

(ii) M が射影的加群のとき，自由加群 P と全射 $f\colon P \twoheadrightarrow M$ を作ると，$f \circ g = \mathrm{id}_M$ を満たす単射 $g\colon M \hookrightarrow P$ が存在し，M は P の直和因子となる.

□

自由加群は “ある程度整列された” 加群だということです.

この定義 1.3.1 において，$M_0 = P, g = \mathrm{id}_P$ とすると，以下のようになります.

ポイント 1.3.5. A を環とする．左 A 加群 P が射影的であるとは，左 A 加群の任意の完全系列

$$M_1 \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

と準同型 $\mathrm{id}_P\colon P \to P$ に対し，準同型 $h\colon P \to M_1$ が存在して，$\mathrm{id}_P = f \circ h$ が成り立つことを言う.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \overset{h}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_P} & & \\ M_1 & \xrightarrow[f]{} & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

この主張は，分裂補題 (定理 1.2.3) の (ii) にそっくりです．それもそのはずで，実は，射影的と言う概念は分裂の言葉で書き換えることができます.

定理 1.3.6. A を環，P を A 加群とする．P が射影的であるための必要十分条件は，A 加群の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \xrightarrow{f_0} P \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

が分裂することである.

最後に，射影的加群の重要な性質を紹介します.

定義 1.3.7. A を環，M_0, M_1, M_2 を左 A 加群とするとき，M_0 から M_1 への A 準同型全体の集合を

$$\mathrm{Hom}_A(M_0, M_1)$$

と書く．また，$f \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2), g \in \mathrm{Hom}_A(M_0, M_1)$ とするとき，g に $f \circ g$ を対応させる写像を f^* と書く．

$$\begin{array}{ccccc} f^*\colon & \mathrm{Hom}_A(M_0, M_1) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M_0, M_2) \\ & \cup & & \cup \\ & g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

$$M_0 \xrightarrow{g} M_1 \xrightarrow{f} M_2, \quad M_0 \xrightarrow{f \circ g} M_2$$

この記法のもとで，次の定理が成り立ちます．

定理 1.3.8. A を環，P を射影的 A 加群とする．このとき，A 加群の任意の完全系列

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \qquad \text{(exact)}$$

に対し，

$$\cdots \xrightarrow{f^*_{n+2}} \mathrm{Hom}_A(P, M_{n+1}) \xrightarrow{f^*_{n+1}} \mathrm{Hom}_A(P, M_n) \xrightarrow{f^*_n} \mathrm{Hom}_A(P, M_{n-1}) \xrightarrow{f^*_{n-1}} \cdots$$

は完全系列である．

これは，“視点を P に移す操作” は，完全性を保つことを主張しています．

定理 1.3.9. A を環，M を右 A 加群とする．また，$1\colon M \to M$ を M の恒等写像とする．このとき，任意の左 A 加群の完全系列

$$N_2 \xrightarrow{g_2} N_1 \xrightarrow{g_1} N_0 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

について，

$$M \otimes N_2 \xrightarrow{1 \otimes g_2} M \otimes N_1 \xrightarrow{1 \otimes g_1} M \otimes N_0 \longrightarrow 0$$

も完全系列である．

こちらの定理は，“テンソル積する操作” は完全性を保つことを主張しています．

圏論の言葉を使えば，“視点を P に移す操作” も “テンソル積する操作” も関手になっています．そこで，どのような関手が完全性を保つのか気になるところです．これについては別の機会に解説しようと思います．

注意 1.3.10. 双対的に，次の定義もあります．

A を環とする．左 A 加群 I が**移入的**であるとは，左 A 加群の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_0$$

と準同型 $g\colon M_1 \to I$ に対し，準同型 $h\colon M_0 \to I$ が存在して，$g = h \circ f$ が成り立つことを言う．

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_0 \\ & & {\scriptstyle g}\downarrow & \swarrow_{h} & \\ & & I & & \end{array}$$

移入的に関する命題は，射影的加群に関する命題の双対として直ちに従うので，本講義では扱っていません．

1.4 図式の追跡

次に，完全性にまつわる証明を可換図式で済ませる方法を紹介します．これは**図式の追跡** (Diagram Chase) と呼ばれる方法で，慣れれば真面目に証明するよりも断然早い上に，楽しいです．

Diagram Chase は，街づくりシミュレーションゲームにおいて道路を走る車を上空から眺める要領で，元の行き先や出発点をメモしながら可換性や完全性，全単射性などを適用して簡潔に議論していくものです．動画を見た方が早いので，詳細は割愛します．

定理 1.4.1. A を環とし，左 A 加群の可換図式が以下で与えられ，二つの行が完全系列とする．

$$\begin{array}{ccccccccc} M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_0 \\ \downarrow{\scriptstyle u_4} & & \downarrow{\scriptstyle u_3} & & \downarrow{\scriptstyle u_2} & & \downarrow{\scriptstyle u_1} & & \downarrow{\scriptstyle u_0} \\ N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_0 \end{array}$$

このとき，以下のことが成り立つ．

(i) u_1 および u_3 が全射で u_0 が単射ならば，u_2 も全射．

(ii) u_1 および u_3 が単射で u_4 が全射ならば，u_2 も単射．

(iii) u_1 および u_3 が同型写像で u_0 が単射，u_4 が全射ならば，u_2 は同型写像．

証明.『【代数学】完全系列』の 06:00 を参照. □

References

[1] 安藤哲哉，ホモロジー代数，数学書房
[2] 河澄響矢，トポロジーの基礎 上，東京大学出版会
[3] 永井保成，代数幾何学入門，森北出版
[4] 松田茂樹，加群とホモロジー代数，森北出版
[5] 森田康夫，代数概論，裳華房
[6] 雪江明彦，代数学 2，環と体とガロア理論，日本評論社
[7] 雪江明彦，代数学 3，代数学の広がり，日本評論社
[8] MacLane, Categories for the Working Mathematician, Springer
[9] Tom Leinster, Basic Category Theory, Cambridge University Press

10242026 Ver.1.1

Copyright (c) 2026 Zundamorphism All Rights Reserved.