Ring Theory

二重数の入門から基礎まで

October 2026

$\mathbb{Z}$undamϕrphism

Contents

Chapter 1　二重数の基礎　3

1.1　初等的な考察 3

1.2　二重数の構成 4

1.3　二重数とテイラー展開 6

References　9

(i) 本コンテンツに関する著作権その他の知的財産権は，すべて著作者に帰属します．著作権法で認められている私的利用の範囲を超えて，本コンテンツの全部または一部を無断で複製，転載，改変，販売，配布する等の行為は一切禁止しております．
(ii) 権利者の許諾なく (i) に違反する行為またはこれに準ずる行為が行われていることが発覚した場合には，法的措置をとらせていただく場合がございます．
(iii) 万が一内容の誤りによって損害やトラブルが発生した場合でも，当方では責任を負いかねます．
(iv) 誤植やご意見等ございましたら，zundamorphism@icloud.com までご連絡いただけますと幸いです．

Chapter 1

二重数の基礎

1.1　初等的な考察

複素数を導入したときには，$i^2 = -1$ を満たす $i \notin \mathbb{R}$ を導入して，$\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ という集合を考えました．これに倣って，まずは $\varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0$ なる数 ε を用いて，集合

$$\mathbb{D} = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

を考えましょう．[*1]

そして，次のようにして $\mathbb{D}$ に加法と乗法を定めます．[*2]

定義 1.1.1.

$$(a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (a + c) + (b + d)\varepsilon$$
$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} ac + (ad + bc)\varepsilon$$

この定義は，$\varepsilon^2 = 0$ となること以外は ε に関する多項式の計算と同じです．

すると，差と商は次のようにして与えられます．[*3]

命題 1.1.2.

$$-(a + b\varepsilon) = -a - b\varepsilon$$
$$(a + b\varepsilon)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}\varepsilon \quad (a \neq 0)$$

[*1] このような集合は dual number ring と呼ばれます．頭文字をとって $\mathbb{D}$ と表すことにします．
[*2] これはあくまでも定義であり，二重数の “性質” ではありません．
[*3] ややこしいですが，これは “加法と乗法それぞれについて逆元が存在する” という命題であり，定義ではありません．

証明. 乗法の逆元が存在することを示す. $(a+b\varepsilon)^{-1}=x+y\varepsilon$ とすると, $a\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}(a+b\varepsilon)^{-1}&=x+y\varepsilon\\ 1&=(a+b\varepsilon)(x+y\varepsilon)\\ 1&=ax+(ay+bx)\varepsilon+by\varepsilon^2\\ 1+0\varepsilon&=ax+(ay+bx)\varepsilon\end{aligned}$$

となる. 係数比較をすることで

$$\begin{cases}1=ax\\ 0=ay+bx\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x=\dfrac{1}{a}\\ y=-\dfrac{b}{a^2}\end{cases}$$

を得る. □

注意 1.1.3. 命題 1.1.2 の乗法の逆元について, 一度存在が示せたら係数比較をしなくても, 次のような計算で簡単に求まります.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b\varepsilon}&=\frac{a-b\varepsilon}{(a+b\varepsilon)(a-b\varepsilon)}\\ &=\frac{a-b\varepsilon}{a^2-b^2\varepsilon^2}\\ &=\frac{a-b\varepsilon}{a^2}.\end{aligned}$$

なお, 乗法の逆元の存在自体は明らかではない点にご注意ください.

1.2 二重数の構成

次に, 二重数の全体 $\mathbb{D}$ が代数的に構成できることを見ていきます. 二重数全体の成す環は, 整域ではないので, $\mathbb{D}$ の構成には整域でない環を用意する必要があります.

定義 1.2.1. A を環とするとき, a が**零因子**であることを,

$$a\text{ が零因子である.}\overset{\text{def}}{\iff}{}^{\exists}b\in A\setminus\{0\},\quad ab=0.$$

と定義する. 零因子が 0 のみである環を**整域**と言う.

ポイント 1.2.2. 二重数は次の対応で行列と同一視することができる.

$$a+b\varepsilon\quad\longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$$

実際, 次のように二重数の計算は行列の演算と見事に合致しています.

命題 1.2.3.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm c & b \pm d \\ 0 & a \pm c \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + bc \\ 0 & ac \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

これは偶然ではなく，二重数が微分と関連していることによります．詳しくは後述します．

行列演算はコンピューターで簡単に計算できるので，二重数の計算はコンピューターに任せられることになります．

次に，より一般的な二重数の構成方法を見ていきます．$\varepsilon^2 = 0$ ということは，当然 ε^2 を 0 と同一視してやる必要があります．そこで，ε を変数とする多項式環 $\mathbb{R}[\varepsilon]$ をイデアル (ε^2) で割った剰余環によって，ε^2 を含む多項式を 0 に潰すことを考えます．

定義 1.2.4. ε を変数とするとき，剰余環 $\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ を **dual number ring** と言い，$\mathbb{D}$ と書く．

$\mathbb{D}$ の元は，

$$a + b\varepsilon + (\varepsilon^2) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

という形で書ける．以下，$a + b\varepsilon + (\varepsilon^2)$ を単に $a + b\varepsilon$ と書くことにする．

注意 1.2.5. 多項式 $f \in \mathbb{R}[\varepsilon]$ は，多項式 $\varepsilon^2 \in \mathbb{R}[\varepsilon]$ で割ることで，$\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ ではある $a + b\varepsilon$ $(a, b \in \mathbb{R})$ と同じ class に属すことがわかります．すなわち，剰余環 $\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ の完全代表系として $\{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ を選ぶことができます．

注意 1.2.6. $\varepsilon + (\varepsilon^2) \in \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ こそが $\varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0$ なる ε です．

記法がややこしいので改めて整理すると，x を変数とする多項式環 $\mathbb{R}[x]$ をイデアル (x^2) で割った剰余環 $\mathbb{R}[x]/(x^2)$ において，

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} x + (x^2) \in \mathbb{R}[x]/(x^2)$$

となります．なぜ変数として ε を選んだかというと，$a + b\varepsilon + (\varepsilon^2)$ を単に $a + b\varepsilon$ と書く略記では，作りたかった ε がそのまま ε になってむしろ分かりやすいからです．

この構成方法だと，剰余環の普遍性を使って代数的な議論ができる点や，$\mathbb{R}$ を任意の環 A に取り替えて議論できる点に優位性があります．

さらに，この構成方法なら，二重数と複素数の類似性も次のようにして説明がつきます．

定義 1.2.7. i を変数とするとき，剰余環 $\mathbb{R}[i]/(i^2+1)$ を**複素数体**と言う．

この環の元は，

$$a+bi+(i^2+1) \quad (a,b\in\mathbb{R})$$

という形で書ける．普通，$a+bi+(i^2+1)$ を単に $a+bi$ と書く．

コラム程度に紹介しておくと，次のような類似概念もあります．

定義 1.2.8. j を変数とするとき，剰余環 $\mathbb{R}[j]/(j^2-1)$ を**分解型複素数の環**と言う．

この環の元は，

$$a+bj+(j^2-1) \quad (a,b\in\mathbb{R})$$

という形で書ける．普通，$a+bj+(j^2-1)$ を単に $a+bj$ と書く．

分解型複素数の環は

$$j^2=1, \quad j\notin\mathbb{R}$$

という数 j を用いて $a+bj$ $(a,b\in\mathbb{R})$ と表される数全体になります．この環は双曲線に関連していて面白いです．

1.3 二重数とテイラー展開

最後に，二重数とテイラー展開との関係について見ていきます．

ポイント 1.3.1. 十分滑らかな関数 f を a まわりでテイラー展開すると，$f(a+\varepsilon)$ は

$$f(a+\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\varepsilon^n$$

となる．ここで $\varepsilon\approx 0$ のとき，ε^2 以降の項を無視してみると，

$$f(a+\varepsilon)\approx f(a)+f'(a)\varepsilon$$

となる．

すなわち，関数 f の定義域を $\mathbb{D}$ に替え，f に二重数 $a+\varepsilon$ を代入すると

$$f(a+\varepsilon)=f(a)+f'(a)\varepsilon$$

となり，ε の係数を抜き出すことで $f'(a)$ を求めることができる．

ポイント 1.3.1 では，本来極限値として定義されていた微分係数

$$f'(a)\overset{\text{def}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を，二重数を使って極限計算をせずに求められています．これは，極限計算が苦手なコンピュー

ターにとって非常においしいのです．このような微分を**自動微分**と言います．

上のような関数に二重数を代入する演算では，ε の係数に着目することで微分公式が導かれます．

命題 1.3.2.

$$\begin{aligned}\big(f(a)+f'(a)\varepsilon\big)\pm\big(g(a)+g'(a)\varepsilon\big)&=\big(f(a)\pm g(a)\big)+\big(f'(a)\pm g'(a)\big)\varepsilon\\ \big(f(a)+f'(a)\varepsilon\big)\big(g(a)+g'(a)\varepsilon\big)&=f(a)g(a)+\big(f(a)g'(a)+f'(a)g(a)\big)\varepsilon\\ \frac{1}{f(a)+f'(a)\varepsilon}&=\frac{1}{f(a)}-\frac{f'(a)}{\big(f(a)\big)^2}\varepsilon\end{aligned}$$

問 1.3.3. $(g\circ f)(a+\varepsilon)$ を式変形することにより，合成関数の微分法の公式を導出せよ．ただし，

$$f(a+b\varepsilon)=f(a)+f'(a)b\varepsilon$$

に注意せよ．

解答.

$$\begin{aligned}g(f(a+\varepsilon))&=g(f(a)+f'(a)\varepsilon)\\&=g(f(a))+f'(a)g'(f(a))\varepsilon.\end{aligned}$$

□

テイラー展開を利用すれば，指数・対数関数や三角関数の自動微分も計算できます．

例 1.3.4. $f(x)=e^x$ の a における微分係数 $f'(a)$ を二重数を用いて求める．

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

より，

$$\begin{aligned}f(a+\varepsilon)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(a+\varepsilon)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^m\varepsilon^{n-m}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(a^n+na^{n-1}\varepsilon\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a^n+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1!}a^{n-1}\\&=e^a+e^a\varepsilon\end{aligned}$$

を得る.

例 1.3.5. $f(x) = \log x$ の a における微分係数 $f'(a)$ を二重数を用いて求める.

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$$

より,

$$\begin{aligned} f(a+\varepsilon) &= \log\left(a\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right)\right) \\ &= \log a + \log\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right) \\ &= \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n \\ &= \log a + \frac{1}{a}\varepsilon \end{aligned}$$

を得る.

例 1.3.6. $f(x) = \sin x$ の a における微分係数 $f'(a)$ を二重数を用いて求める. 三角関数の加法定理と

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

より,

$$\begin{aligned} f(a+\varepsilon) &= \sin a \cos\varepsilon + \cos a \sin\varepsilon \\ &= \sin a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \varepsilon^{2n} + \cos a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \varepsilon^{2n+1} \\ &= \sin a + \varepsilon \cos a \end{aligned}$$

を得る.

References

[1] 森田康夫，代数概論，裳華房

[2] 雪江明彦，代数学 2，環と体とガロア理論，日本評論社

[3] Farid Messelmi, Multidual numbers and their multidual functions

[4] W. B. Vasantha Kandasamy, Florentin Smarandache, Dual Numbers, ZIP PUBLISHING

10192026 Ver.1.1

Copyright (c) 2026 Zundamorphism All Rights Reserved.